5-11-18

$\exists n_0 \quad \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} \leq \sqrt{n} \quad , \forall n \geq n_0$

Υπόθεση Επαγωγής

$\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{k} \leq \sqrt{k} \quad (n=k)$

$n = k+1 \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \overset{(?)}{\leq} \sqrt{k+1}$

$\xrightarrow[\text{Υποθ.}]{\text{Επαγ.}}$ Αν δο $\sqrt{k} + \frac{1}{k+1} \leq \sqrt{k+1}$

$\Leftrightarrow \quad k + \frac{2\sqrt{k}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq k+1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sqrt{k}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 1$

- $\frac{2\sqrt{k}}{k+1} = \frac{2}{\frac{k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

- $\frac{1}{(k+1)^2} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

- $\frac{2\sqrt{k}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \longrightarrow 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall k \geq k_0$,

$\frac{2\sqrt{k}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} < \varepsilon$

- Για $\varepsilon = 1$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ τω $\frac{2\sqrt{k}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} < 1$

Άρα $\forall k \geq k_0$ $\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{k} \leq \sqrt{k}$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}: 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq n^p$ $(p > 0)$ $\forall n \geq n_0$

$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \dots + 1 = n \leq n^p$, $p \geq 1$

Άσκηση

$\to \{a_n\}$ ακολουθία, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_1})$, $n \geq 1$

(i) Συγκλίνει η $\{a_n\}$;

(ii) Αν και ποιο το όριό της;

Λύση

Έστω ότι συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n \to \infty} a_n + \frac{1}{\lim_{n \to \infty} a_n}\right)$

$\Rightarrow l = \frac{1}{2}(l + 1/l)$

$\Rightarrow 2\ell^2 = \ell^2 + 1$ * Με επαγωγή ισχύει $a_n \geq 0$,

$\Rightarrow \ell^2 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ell \geq 0 \Rightarrow \ell = 1$

$\boxed{\ell = 1}$ ή $\ell = -1$

ii) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + 1/a_n) - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - a_n\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1 - a_n^2}{a_n}\right)$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} > 1$

$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{41}{40} > 1$

Θδο (Με επαγωγή): $a_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Για $n = 1$ ισχύει, έστω ότι ισχύει για $n = k$

Θδο $a_{k+1} > 1$

$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{a_k}\right) > 1$

$\Rightarrow \{a_n\}$ φθίνουσα

Όμως, $0 < a_n < a_1 \Rightarrow \{a_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει

$x = a_k$ Θδο $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 1}{x} \geq 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ ισχύει

Αν $a_n \to 0$ τότε $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$ είναι μη φραγμένη ακολουθία, <u>ΑΤΟΠΟ</u>

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $M > 0$. Θέτω $\varepsilon = \frac{1}{M}$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$\forall\, n \geq n_0$, $\underset{\overset{\parallel}{|a_n|}}{a_n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = M \Rightarrow \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n} > \frac{M}{2}$,

$\forall\, n \geq n_0$

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $\lim_{x \to I} f(x) = 0$

$a_n \to 0$

Ισχύει ότι $\frac{1}{a_n} \longrightarrow \infty$?

π.χ. $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \to \infty$

$a_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{a_n} = -n \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = -\infty$

$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \Leftrightarrow \lim \frac{1}{a_n}$ <u>δεν έχει νόημα</u>

Σημεία συσσώρευσης ακολουθίας

Σύνολο των σημείων συσσώρευσης της $\{a_n\} = \{\ell \in \mathbb{R} :$
$\exists$ υπακολουθία $\{a_{\kappa n}\}$, τω $\lim_{n\to\infty} a_{\kappa n} = \ell\}$

Αν $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, τότε το μοναδικό σ.σ. της $\{a_n\}$ είναι το ℓ

πχ. • $a_n = n$ κανένα σ.σ. αφού $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, δηλαδή δεν συγκλίνει

• $a_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ άρτιος} \\ \eta\mu(\pi/2 \cdot n), & n \text{ περιττός} \end{cases}$

$a_{2n} \to 0$

n περιττός: $2k+1 \Rightarrow a_n = a_{2k+1} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) =$

$= \eta\mu(k\pi + \pi/2)$.

όταν $k = 2v$ $a_n = a_{2k+1} = a_{4v+1} = 1$

$k = 2v+1$ $a_n = a_{2k+1} = a_{4v+3} = -1$

$\left.\begin{array}{l} a_{2v} \to 0 \\ a_{2v+1} = 1 \to 1 \\ a_{2v+3} = -1 \to -1 \end{array}\right\}$ 3 σσ.

• $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ περιττος} \\ 1/n, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$

→ Μη φραγμένη

1 σσ., το 0.

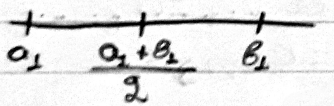
• $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Το a είναι σσ. του A αν $\exists \{a_n\}$, τω $a_n \in A \setminus \underline{\{a\}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$

Τα σσ μιας ακολουθίας είναι ακριβώς τα σσ του συνόλου τιμών της μαζί με τα όρια σταθερών υπακολουθιών της.

<u>Θεώρημα</u> (Bolzano-Weierstrass)
Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει σ.σ.

<u>Απόδειξη</u>
Έστω $\{x_n\}$ φραγμένη ακολουθία $\exists a_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ τω. $a_1 \le x_n \le \beta_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$



Είτε στο διάστημα $[a_1, \frac{a_1+\beta_1}{2}]$ είτε στο $[\frac{a_1+\beta_1}{2}, \beta_1]$

υπάρχουν άπειροι όροι της $\{x_n\}$ (και στα δύο)

Αν υπάρχουν άπειροι όροι στο $[a_1, \frac{a_1+\beta_1}{2}]$, θέτω

$a_2 = a_1$, $\beta_2 = \frac{a_1+\beta_1}{2}$ αλλιώς θέτω $a_2 = \frac{a_1+\beta_1}{2}$ κ'

$\beta_2 = \beta_1$

$\subseteq [a_1, b_1]$

Βρήκαμε, λοιπόν, ένα διάστημα $[a_2, b_2]$ που να περιέχει άπειρους όρους της $\{x_n\}$ κ' $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$

Ομοίως $\exists [a_3, b_3] \subseteq [a_2, b_2]$, που να περιέχει άπειρους όρους της $\{x_n\}$ κ' $b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b_1 - a_1}{4}$

κοκ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ διάστημα $[a_n, b_n]$ που να περιέχει άπειρους όρους της $\{x_n\}$, $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ κ'
$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow$ $[a_n, b_n]$ κιβωτισμός του Cantor
$\Rightarrow \exists! \, \xi \in \mathbb{R}$, τ.ω. $\xi \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$
Θδο $x_{k_n} \to \xi$
$-\varepsilon < x_{k_n} - \xi < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ (?)

$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$
όμως $a_n, b_n \to \xi$ $\xRightarrow[\text{ανισότητες}]{\text{ισοσυγκλίνουσες}}$ $x_{k_n} \to \xi$